

Dieses Dokument soll eine Art Übersetzungstafel sein für die „mathematische Sprache“. Es ist ausgelegt für Studierende der Service Vorlesungen Mathe I/II.

Mathematische Symbole

Diese Tabelle zeigt die am häufigsten gebrauchten Symbole, was sie bedeuten und wie man sie verwendet (oder nicht verwendet). Eine komplette Liste aller mathematischen Symbole und deren Bedeutung kann man z.B. auf Wikipedia finden [Wikipedia: Liste mathematischer Symbole].

Viele Symbole können durch Wörter ersetzt werden, d.h. in der Anwendung müssen diese Symbole nicht unbedingt verwendet werden, man kann meist auch einen kurzen Satz dazu schreiben. Viele Symbole sind vor allem aufgeführt, damit man weiss was sie bedeuten und wie man sie richtig benutzen würde, damit man sie nicht aus Versehen falsch verwendet.

Zeichen	Name	Erklärung	Beispiel	So nicht (ggf. Grund in Klammern)
Gleichungen und Ungleichungen				
$=$	gleich	Zwei exakt gleiche Sachen.	$0.5 = 1/2$	$1/3 = 0.33$
$\neq$	ungleich	Etwas ist nicht das andere.	$A \cdot B \neq B \cdot A$	
$\stackrel{!}{=}$	soll gleich	Wenn man hinschreibt, was man in einer Aufgabe zeigen will, die Aussage aber nicht generell stimmt.	Zu zeigen: $x \stackrel{!}{=} 3y$	
$:=$	definiert als	Um zu zeigen, dass man die Entscheidung trifft, etwas Neues zu definieren.	$f(x) = 3x + 3C$, wir definieren neu $\tilde{c} := 3C$	
$\approx$	ungefähr gleich	Um zu zeigen, dass man etwas vereinfacht/gekürzt/gerundet hat.	$1/3 \approx 0.33$	$1/2 \approx 0.5$
$\sim, \propto$	proportional	Um zu zeigen, dass sich zwei Grössen proportional verhalten.	Die Biberpopulation $b(x)$ wächst proportional zu der Wolfspopulation $w(x)$: $b(x) \sim w(x)$ oder $b(x) \propto w(x)$.	$1/3 \sim 0.33$
$\leq$	kleiner gleich	Um eine Ungleichung aufzustellen.	$x \leq 3$	
$\geq$	grösser gleich	Um eine Ungleichung aufzustellen.	$x \geq 3$	
$<$	strikt kleiner als	Um eine strikte Ungleichung aufzustellen.	$x < 3$	$3 < 3$
$>$	strikt grösser als	Um eine strikte Ungleichung aufzustellen.	$x > 3$	$3 > 3$
Mengenlehre				
$\in$	Element von	Relation zwischen einem Element und einer Menge.	$3 \in \mathbb{N}$	$\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$
$\notin$	kein Element von	Relation zwischen einem Element und einer Menge.	$3.5 \notin \mathbb{N}$	$\{1.5, 2, 3\} \notin \mathbb{N}$
$\subset$	(echte) Teilmenge	Die Relation von zwei Mengen. Je nach Person gebraucht wie $\subsetneq$ oder $\subseteq$.	$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	$3 \subset \mathbb{N}$
$\subseteq$	Teilmenge oder gleich	Die Relation von zwei Mengen, die auch gleich sein können.	$\{0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$	
$\subsetneq$	echte Teilmenge	Die Relation von Mengen, die nicht gleich sind.	$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$	$\{0, 1, 2, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}$
$\not\subseteq$	keine Teilmenge	Um zu zeigen, dass etwas keine Teilmenge von einer anderen Menge ist.	$\{0, 1, 2\} \not\subseteq \{-1, 0, 1\}$	$\{0, 1, 2\} \not\subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$\setminus$	ohne	Um darzustellen, dass eine Menge aus einer anderen Menge ausgeschlossen ist.	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \in \mathbb{R} \setminus 0$ (Eine Zahl ohne Mengenklammern ist keine Menge und kann nicht ausgeschlossen werden)
$\cup$	Vereinigung	Um die Vereinigung von zwei Mengen darzustellen.	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\mathbb{N} \cup 1.5$
$\cap$	Schnitt	Um den Schnitt von zwei Mengen darzustellen.	$\{0, 1, 2, 3\} \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$	$\mathbb{N} \cap 1.5$
$\emptyset$	leere Menge	Wenn eine Menge leer ist.	Sei M_+ die Menge aller Meere, die an die Schweiz grenzen. $M_+ = \emptyset$	$M_+ = 0$, $M_+ = \{\emptyset\}$
Logik und Quantoren				
$\forall$	für alle	Um eine Aussage über alle Elemente einer Menge zu machen.	$\forall x \in \mathbb{N}$ gilt, dass sie ohne Bruchstrich dargestellt werden können.	$\forall x$ gilt, dass es Zahlen sind. (x muss Teil einer Menge sein (irgendwo „leben“))
$\exists$	es existiert	Eine Aussage über die Existenz von (mindestens) einem Element einer Menge.	$\exists x \in \mathbb{N}$, das grösser als 3 ist.	
$\nexists$	es existiert nicht	Eine Aussage darüber, dass kein einziges Element mit einer Eigenschaft existiert.	$\nexists x \in \mathbb{N}$, das strikt kleiner als 0 ist.	
$\exists!$	es existiert genau ein	Eine Aussage über eine Existenz und deren Eindeutigkeit.	$\exists! x \in \mathbb{N}$, sodass gilt $3 < x < 5$.	$\exists! x \in \mathbb{N}$, sodass gilt $x < 3$.
$\wedge$	und	Um zwei Aussagen zu verknüpfen mit dem Sinn: „Für Aussage A und Aussage B gilt, ...“	Ich bin gross $\wedge$ ich bin stark (Gesamtaussage ist nur wahr, wenn ich sowohl gross als auch stark bin)	Sagt nichts über die Wahrheit der zwei Aussagen aus, nur dass sie zusammen gehören.
$\vee$	oder	Um zwei Aussagen zu verknüpfen mit dem Sinn: „Für Aussage A oder Aussage B (oder beides) gilt, ...“	Der Vogel ist blau $\vee$ der Vogel ist rot (die Gesamtaussage ist wahr wenn der Vogel blau, rot oder blaurot ist).	oder $\neq$ entweder oder
$\underline{\vee}, \dot{\vee}$	entweder oder	Um zwei Aussagen zu verknüpfen mit dem Sinn: „Entweder für Aussage A oder Aussage B (nicht beides) gilt, ...“	Der Vogel ist blau $\dot{\vee}$ der Vogel ist rot (die Gesamtaussage ist wahr wenn der Vogel blau oder rot ist, ist er rotblau so ist die Gesamtaussage falsch).	
$\neg$	nicht	Um die Negation einer Aussage auszudrücken	Aussage A: „etwas hat drei Ecken“. Gilt für einen Hut $\neg A$, so ist es nicht mein Hut.	
$:$	„sodass“	Um Eigenschaften von vorherigen Aussagen zu beschreiben.	I soll das Intervall sein von allen natürlichen Zahlen zwischen 3 und 7. $I = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 7\}$.	

Weiter auf der nächsten Seite...

zu beachten ist, dass diese Zuweisungen keineswegs in Stein gemeißelt sind. Buchstaben sind nur Platzhalter, d.h. welcher Buchstabe für welchen Parameter genutzt wird, ist in der Mathematik oft Geschmackssache oder hängt stark vom Kontext ab. Sehr häufig wird in Anwendungsaufgaben einfach der Anfangsbuchstabe des beschriebenen Objekts gewählt: Eine Funktion, die eine Biberpopulation beschreibt, wird in der Vorlesung oder Übung meist als $b(x)$ eingeführt und eben nicht als das klassische $f(x)$, das man rein formal bei einer Funktion erwarten würde. Ebenfalls werden oft Subskripte verwendet um ein Objekt genauer zu beschreiben (z.B. $f_u(x)$ für die untere Funktion). Dies ist in dieser Aufzählung nicht berücksichtigt.

Buchstabe	Mögliche Bedeutung	Beispiel
Kleine lateinische Buchstaben		
a, b, c	Parameter	$f(x) = ax^2 + bx + c$
d	Differenzial 6, Abstandsfunktion	$\frac{d}{dx}f(x) = 2ax + b$ Der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ vom Punkt 3 ist gegeben durch $d(x) = 3 - x $.
e	eulersche Konstante 3	$e \approx 2.72$
f, g, h	Funktion 5	$f(x) = x^2$
i	imaginäre Einheit 4, Indexvariable	$z = 3i + 2$ $\sum_{i=0}^n x_i^2$
j, k	Indexvariable	a_{jk} ist der Eintrag in der j -ten Zeile und der k -ten Spalte.
l	Länge	Die Echse wächst mit der Zeit t und ist $l(t)$ lang.
m	Dimensionsvariable 11, Masse	Eine $m \times n$ -Matrix. $F = m \cdot a$
n	Dimensionsvariable 11, Anzahl (bei natürlichen Zahlen)	Eine quadratische $n \times n$ -Matrix. Es gibt n Hasen: $\{h_1, \dots, h_n\}$.
p	Wahrscheinlichkeit, Parameter	Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze Kopf zeigt, ist $p = 0.5$. $x_{1/2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$
q	Parameter	
r	Radius	$A = r^2 \pi$
s	Laufvariable 11	Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind $v = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
t	Laufvariable 11, Zeit	Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind $v = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $s, t \in \mathbb{R}$, wobei beide nicht gleichzeitig 0 sind. Die Population ändert sich mit der Zeit: $p(t) = 2e^t$.
u, v, w	Vektorvariable 11	$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
x	Funktionsargument 5, Unbekannte, Funktion (bei DGL) 10	$f(x) = 3x$ $x = x^2 - 3$
y	Unbekannte, Funktion (bei DGL) 10	
z	Unbekannte, komplexe Zahl 4, Funktion (bei DGL) 10	$y' = x + y^2$ $z = 3i + 2$ $z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ x(t) - y(t) \end{pmatrix}$
Grosse lateinische Buchstaben		
A	Matrix 11	
B	Matrix, Bereich 1	$B := \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$
C	Konstante	$F(x) = x^2 + C$
D	Definitionsbereich 5, Diagonalmatrix 11	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$
E	Einheitsmatrix 11	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
F	Stammfunktion 8, Funktion/Formel (oft mehrere Argumente) 10	$F(x) = \sin(x) + C$ $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
G	Graph (einer Funktion) 5	$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$
H	Hermiteische Matrix 4	
I	Identitätsmatrix 11, Intervall	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I = [0, 1]$
J	Jacobi-Matrix	
K	Konstante	
M	Matrix 11	$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
P, Q, R, T	Matrix mit speziellen Eigenschaften	
V	Vektorraum	$V = \mathbb{R}^2$
X	Matrix als Unbekannte	
Doppelstrich-Buchstaben (Tafel-Fett Buchstaben) und Fraktur-Buchstaben		
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen (Achtung: je nach Person ist 0 eine natürliche Zahl oder nicht)	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ oder $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Weiter auf der nächsten Seite...

Buchstabe	Mögliche Bedeutung	Beispiel
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	$\{\pi, \sqrt{2}\} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\Im$	Imaginärteil einer komplexen Zahl 4	$\Im(2 + 3i) = 3$
$\Re$	Realteil einer komplexen Zahl 4	$\Re(2 + 3i) = 2$
Griechische Buchstaben		
α, β (Alpha, Beta)	Winkel, Parameter Parameter	$\alpha = 30^\circ, \beta = \pi$ v ist eine Linearkombination von w, u : $v = \alpha w + \beta u.$
γ (Gamma)	Weg/Pfad 7, Faktor, Winkel	$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}$
δ (Delta)	kleine Änderung/Differenz	
ϵ, ε (Epsilon)	sehr kleine Zahl	
θ, ϑ (Theta)	allgemeiner Winkel	
λ (Lambda)	Eigenwert	
μ (Mu)	Eigenwert, Mittelwert	
π (Pi)	Kreiszahl	$\pi \approx 3.14$
ρ, ϱ (Rho)	Dichte	
σ (Sigma)	Standardabweichung	
ϕ, φ (Phi)	Funktion, Winkel	
Δ (Gross-Delta)	Differenz/Änderung, Dreiecksmatrix	$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Π (Gross-Pi)	Produktzeichen	$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100 = \prod_{i=1}^{100} i$
Σ (Gross-Sigma)	Summenzeichen	$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$
Φ (Gross-Phi)	Potential, Abbildung	

Infoboxen: Bedeutung und Schreibweisen

Die folgenden Infoboxen fassen die ersten mathematischen Themengebiete zusammen. Sie zeigen, welche unterschiedlichen Schreibweisen und Notationen für dieselben mathematischen Objekte existieren und was die einzelnen Teilelemente in den jeweiligen Formeln genau bedeuten.

Vor allem bei Funktionen werden oft viele Dinge ausgelassen (oder implizit angenommen), d.h. in der Praxis sind meist nicht alle Informationen, die man angeben könnte, angegeben.

1: Bereiche und Intervalle

Bereiche:

$$\begin{aligned} B &:= \{\mathbf{x} \in D && | \text{Einschränkung von } \mathbf{x}\} \\ \iff B &:= \{\mathbf{x} \in D && : \text{Einschränkung von } \mathbf{x}\} \\ \text{Beispiel: } B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 && | x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

$\{ \}$ sind das Zeichen für eine Menge (in diesem Fall ein Bereich) und zwischen den Klammern befinden sich die „Infos“ über den Bereich.

$\mathbf{x}$ ist eine Variable (oder ein Tupel), die stellvertretend für den Inhalt des Bereiches steht.

D ist der Raum, in dem der Bereich „lebt“.

Nach dem $|$ (oder $:$) werden die Eigenschaften des Bereichs geschrieben.

Intervalle: Intervalle sind ein sehr häufig auftretender Fall von Bereichen und haben deshalb viele verschiedene eigene Schreibweisen, um darzustellen, dass x in einem Intervall I ist.

Offene Intervalle (Grenzen sind **nicht** inbegriffen):

$$\begin{aligned} 3 &< x < 5, \\ x &\in (3, 5), \\ x &\in]3, 5[, \\ x &\in I \text{ mit } I = (3, 5), \\ x &\in I \text{ mit } I =]3, 5[. \end{aligned}$$

Geschlossene Intervalle (Grenzen sind inbegriffen):

$$\begin{aligned} 3 &\leq x \leq 5, \\ x &\in [3, 5], \\ x &\in I \text{ mit } I = [3, 5] \end{aligned}$$

Halboffene Intervalle (eine Grenze offen, die andere geschlossen), (hier untere Grenze offen, die obere geschlossen):

$$\begin{aligned} 3 &< x \leq 5, \\ x &\in (3, 5], \\ x &\in]3, 5], \\ x &\in I \text{ mit } I = (3, 5] \end{aligned}$$

2: Limes

Der rechtsseitige Grenzwert von einer Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 :

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Die Pfeile zeigen die Richtung an, von wo sich x an x_0 nähert. Beim rechtsseitigen Grenzwert ist das von rechts wenn wir den Zahlenstrahl anschauen. D.h. man betrachtet die Werte $f(x_0 + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$. Für den linksseitigen Grenzwert betrachtet man die Werte $f(x_0 - \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Wenn die beiden Werte übereinstimmen, spricht man vom Limes/Grenzwert und schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

x ist die Variable, die sich auf x_0 zubewegt. Der Limes ist dann der Wert, der angenähert wird bei dieser Bewegung (wenn er existiert). x_0 muss nicht unbedingt im Definitionsbereich von f sein. Meist ist $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

3: Exponential und Logarithmus

Die **Exponentialfunktion** (e-Funktion):

$$x \mapsto e^x = \exp(x) = \exp\{x\}$$

mit $e = 2.718281 \dots$ der Eulerschen Zahl.

Je nach Kontext kann x eine reelle oder komplexe Zahl bzw. ein Ausdruck sein, z.B.:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \exp(i\pi) && = \exp\{i\pi\} \\ e^2 &= \exp(2) && = \exp\{2\} \\ e^{2x + \ln(3)} &= \exp(2x + \ln(3)) && = \exp\{2x + \ln(3)\} \end{aligned}$$

Logarithmus: Für $b > 0, b \neq 1$ und $x > 0$

$$y = \log_b(x) \iff y = b^x$$

ist der Logarithmus der positiv reellen Zahl x zur Basis b die Zahl y .

Meist meint man die Logarithmus Funktion (zur Basis b):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_b(x) \end{aligned}$$

Der **natürliche** Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis e :

$$\log_e(x) = \ln(x) = \log(x)$$

Manchmal ist mit $\log(x)$ auch der Logarithmus zur Basis 10 (Schule) oder 2 (Informatik) gemeint:

$$\begin{aligned} \log_{10}(x) &= \log(x) \\ \log_2(x) &= \log(x) \end{aligned}$$

4: Komplexe Zahlen

Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= x + iy \\ &= \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \\ &= \Re(z) + i \cdot \Im(z) \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(z) = \Im(z)$ beschreibt den **Imaginärteil** von z und ist selbst reell (ohne i).

$\operatorname{Re}(z) = \Re(z)$ beschreibt den **Realteil** von z und ist auch reell.

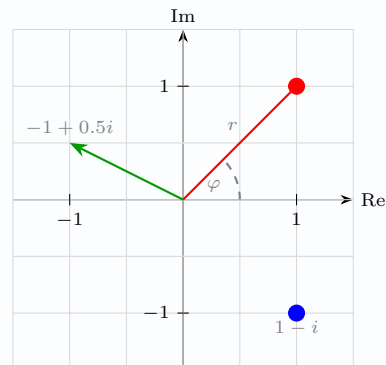
Polarform einer komplexen Zahl:

$$\begin{aligned} z &= r \cos(\varphi) + ri \sin(\varphi) \\ &= r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r \cdot \operatorname{cis}(\varphi) \end{aligned}$$

Euler-Form/ Exponentialform /Exponentielle Polarform /Polarform:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \\ &= |z|e^{i\varphi} \\ &= r \exp\{i\varphi\} \end{aligned}$$

Drei verschiedene Darstellungen in der Eulerschen Ebene der Zahlen $-1 + 0.5i$ (grün), $\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ (rot) und $1 - i$ (blau):



Komplex konjugieren:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z^* = \overline{a + bi} = (a + bi)^* = a - bi \\ \bar{z} &= z^* = \overline{re^{i\varphi}} = (re^{i\varphi})^* = re^{-i\varphi} \end{aligned}$$

5: Funktionen

Bedeutung der Bestandteile von Funktionsaufgaben:

Beispiel:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow W && f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \text{ oder} && x \mapsto x^2 + \sin x \text{ oder} \\ f(x) &= \dots && f(x) = x^2 + \sin x \\ x_0 &= \dots && x_0 = 0 \\ f(x_0) &= \dots && f(x_0) = 0 \end{aligned}$$

f ist der „Name“ der Funktion (oft auch g, h).

D ist der Definitionsbereich (woher nimmt die Funktion ihren Input).

W ist die Zielmenge (wohin geht die Funktion) (oft auch Wertebereich genannt).

x ist eine **beliebige** Variable des Definitionsbereichs ($x \in D$).

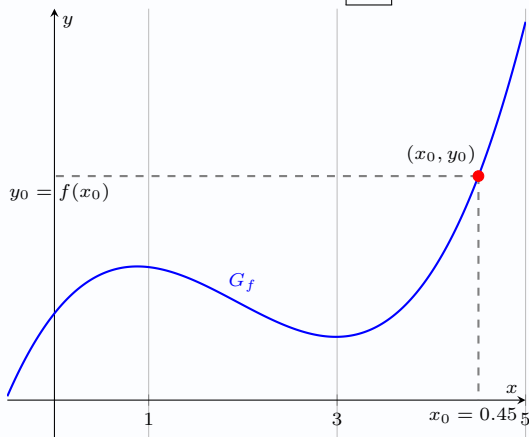
$f(x)$ der eindeutige Funktionswert an der Stelle x . (Die „Anleitung“ wie man eine beliebige Variable aus dem Definitionsbereich eindeutig im Wertebereich auswertet.)

Sowohl Zielmenge, Definitionsbereich und Funktionswert gehören zu einer vollständigen Definition einer Funktion (d.h. eine Funktion mit gleichem $f(x)$ aber anderem Definitionsbereich ist technisch gesehen eine andere Funktion).

x_0 ist ein beliebiger aber **fixer** Wert im Definitionsbereich.

$f(x_0)$ ist der (fixe) **eindeutige** Funktionswert von f an der Stelle x_0 .

Wenn man eine Funktion graphisch darstellt ist der y -Wert an der Stelle x gerade $f(x)$ und der ganze Graph G_f von f ein Bereich in $\mathbb{R}^2$.



6: Ableitung von Funktionen

Verschiedene Darstellungen von der 1.-3. Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dot{f}(x) = f^{(1)}(x) = \dot{f}^{(1)}(x) \\ &= \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \\ f''(x) &= \ddot{f}(x) = f^{(2)}(x) = \dot{f}^{(2)}(x) \\ &= \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \\ f'''(x) &= \dddot{f}(x) = f^{(3)}(x) = \dot{f}^{(3)}(x) \\ &= \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \right) \end{aligned}$$

d bedeutet, dass man die Funktion ganz ableiten kann (x ist die einzige Variable).

$f'(x_0)$ ist der Ableitungswert an der Stelle x_0 (man leitet zuerst nach x ab und setzt dann x_0 ein).

Mehrdimensionale Funktionen: Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, hier mit $n = 2$ (nicht nur x als Input), kann man nur eine **partielle** Ableitung nehmen (man muss entscheiden nach welcher Variable man ableitet, der Rest wird wie eine Konstante behandelt). (Analog für $n > 2$) Auch hier kann man die Funktion mehrmals partiell ableiten, solange man jedes Mal eine Entscheidung trifft nach welcher Variable:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_x(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f_y(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} = f_{xx}(x, y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} = f_{xy}(x, y) \quad (4)$$

(1) ist die (erste) partielle Ableitung nach x , (2) die (erste) partielle Ableitung nach y .

(3) ist die (zweite) partielle Ableitung wenn man zweimal nach x ableitet.

(4) ist die (zweite) partielle Ableitung wenn man zuerst nach x und dann nach y partiell ableitet.

∂ bedeutet, dass man die Funktion nur **partiell** abgeleitet hat.

$f_x(x_0, y_0)$ ist der Ableitungswert an der Stelle (x_0, y_0) (man leitet zuerst nach x ab und setzt dann (x_0, y_0) ein).

$f_y(x_0, y_0)$ ist der Ableitungswert an der Stelle (x_0, y_0) (man leitet zuerst nach y ab und setzt dann (x_0, y_0) ein).

$f_{xy}(x_0, y_0)$ ist der Ableitungswert an der Stelle (x_0, y_0) (man leitet zuerst nach x , dann nach y ab und setzt dann (x_0, y_0) ein).

7: Parametrisierung von Wegen

Ein Weg ist eine Funktion, die von einem Intervall nach $\mathbb{R}^n$ geht:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = \vec{r}(t) = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$[a, b]$ ist das Parameterintervall. $\gamma(a)$ liefert den Startpunkt, $\gamma(b)$ den Endpunkt. Wenn man t von a nach b „verschiebt“ und $\gamma(t)$ betrachtet, ergibt sich genau der Weg, der γ beschreiben soll.

$\gamma(t), \vec{r}(t), \mathbf{x}(t)$ sind verschiedene Schreibweisen für den Wegvektor.

$(x(t), y(t), \dots)^\top$ sind die Koordinatenfunktionen, die angeben, wo man sich zum Zeitpunkt t befindet.

8: Integral

Unbestimmtes Integral (ohne Grenzen):

$$\int f(x) dx$$

$\int$ und dx gehören zusammen (kein Integral $\int$ ohne Differenzial dx). dx zeigt dabei an, was die Integrationsvariable ist (hier also x).

$f(x)$ ist die Funktion, die integriert wird, dabei muss es eine Funktion sein, die von x abhängt (oder konstant ist), kann aber auch eine Funktion mit mehreren Argumenten (inklusive x) sein. (Bzw. wenn dort dy steht, muss es eine Funktion von y sein etc.)

Bestimmtes Integral (mit Grenzen):

$$\int_a^b f(x) dx$$

a, b sind die Integralgrenzen, a die untere und b die obere Integralgrenze, deshalb gilt meist $a \leq b$. D.h. man schaut die Funktion an für $x \in [a, b]$.

Integral über mehrere Variablen:

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) dA &= \iint_B f(x, y) dx dy = \iint_B f(x, y) dy dx \\ &= \int_B f(x, y) dA \\ &= \int_{B_x} dx \int_{B_y} dy f(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

Beispiel: $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, u(x) \leq y \leq o(x)\}$

$$\iint_B f(x, y) dA = \int_0^1 \left(\int_{u(x)}^{o(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$\iint$ zeigt an, dass über zwei Variablen integriert wird. (Wenn das klar ist wird ab und zu trotzdem nur ein $\int$ verwendet.)

B beschreibt das Integrationsgebiet (die Menge), über die integriert wird.

dA gehört zum Integral und zeigt an, welches die Integrationsvariablen sind.

$dy dx$ zeigt an, dass zuerst über y integriert wird mit den Integralgrenzen $u(x), o(x)$ und dann über x mit den Integralgrenzen 0, 1.

In der Schreibweise (5) wird die Reihenfolge explizit angegeben durch die Teilintegrale $\int_{B_x} dx$, das beschreibt über welche x -Werte integriert wird und $\int_{B_y} dy$ über welche y -Werte des Bereichs B integriert wird.

B_x und B_y beschreiben die jeweiligen Grenzen für x und y .

Analog für ein dreidimensionales Integral:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_B f(x, y, z) dV$$

9: Wegintegral

Es gibt zwei Weg- bzw. Kurven-, Linien-, Konturintegrale: Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (1. Art) und eines Vektorfeld $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (2. Art).

Wegintegral 1. Art:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x, y) = x + y^2$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^1 f(2t, e^t) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 (2t + (e^t)^2) \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix} \right\| dt$$

$\mathbb{R}^n$ ist der Raum, in dem der Weg γ „lebt“. Dies muss die gleiche Dimension n haben wie der Definitionsbereich der Funktion f .

γ ist der Weg, der den Integrationspfad beschreibt. Daher sind die Integrationsgrenzen $[a, b]$ auch die Anfangs- und Endpunkte des Weges.

$f(\gamma(t))$ bedeutet, dass man die 1. Komponente der Auswertung des Weges $h_1(t)$ als 1. Argument (x -Koordinate) braucht für die Funktion f . Die 2. Komponente $h_2(t)$ für das 2. Argument (y -Koordinate) etc.

$\|\dot{\gamma}(t)\|$ bedeutet, dass man das Ganze mit dem Betrag der Ableitung (nach t) von γ multipliziert.

Wegintegral 2. Art:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

$$:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ \sin(x) - y \end{pmatrix}$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 f(2t, e^t) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t + (e^t)^2 \\ \sin(2t) - e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix} dt$$

$d\mathbf{x}$ bedeutet, dass man entlang des Vektors $\mathbf{x}$ (fett x) integriert.

$f(\gamma(t))$ bedeutet, dass man die 1. Komponente der Auswertung des Weges $h_1(t)$ als 1. Argument (x -Koordinate) braucht für die Funktion f . Die 2. Komponente $h_2(t)$ für das 2. Argument (y -Koordinate) etc.

$\cdot \dot{\gamma}(t)$ bedeutet, dass man das Skalarprodukt mit der Ableitung (nach t) von γ nimmt.

Geschlossenes Integral: (oder Ringintegral, Umlaufintegral, Zirkulation)

$$\oint_{\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds$$

$\oint$ bedeutet, dass man über den geschlossenen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ integriert. Der Kreis ist nicht zwingend, wird aber oft als Info geschrieben. Dies gilt für Integrale 1. und 2. Art.

10: Differentialgleichungen

Ziel bei Differentialgleichungen (DGL) ist es nicht, ein x zu finden, sondern eine unbekannte Funktion $y(x)$, die diese Gleichung erfüllt.

Gewöhnliche/skalare Differentialgleichung (DGL) n -ter Ordnung:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$y^{(n)}$ ist die höchste Ableitung (deshalb n -te Ordnung).

F bedeutet, dass es (irgend)eine Funktion mit den Argumenten $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ist.

x bedeutet, dass die gesuchte Funktion x als Argument hat. Beispiel:

$$y^{(5)} = y \sin x + y'' - y' \cdot y^{(4)}$$

Wenn eine allgemeine Funktion gesucht wird, wird meist x als Argument genommen, d.h. man könnte es auch ausschreiben:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Wenn die DGL einen zeitlichen Ablauf beschreibt, wird meist t als Argument genommen und anstatt y' schreibt man oft $\dot{y}$:

$$y^{(n)} = y^{(n)}(t)$$

$$= F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$= F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = F(t, y, \dot{y}, \dots, \dot{y}^{(n-1)})$$

$$= F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$$= F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$$= F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \dot{y}^{(n-1)}(t))$$

Lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (DGL-System):

Für ein allgemeines $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)^T$ werden meist Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ in x gesucht, hier dargestellt für $n = 2$:

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = Ay = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$= y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix} = Ay(x)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1(x) + by_2(x) \\ cy_1(x) + dy_2(x) \end{pmatrix}$$

Wenn es sich um ein DGL-System handelt, das eine Bewegung in der Ebene über die Zeit beschreibt, findet man oft folgende Darstellung (oder mit $\dot{z}$ wie oben):

$$z' = z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$= Az = Az(t)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax(t) + by(t) \\ cx(t) + dy(t) \end{pmatrix}$$

Für ein DGL-System für eine Bewegung im Raum wird oft

$$w' = w'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

gebraucht.

11: Matrizen und Vektoren

Eine $(m \times n)$ -Matrix M :

$$M = \mathbf{M} = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} = (a_{ij}) = (a_{i,j})$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

für $I = \{1, \dots, m\}$ und $J = \{1, \dots, n\}$.

M ist der Name der Matrix (oft auch A, B).

$(m \times n)$ ist die Dimension der Matrix (m ist die Anzahl Zeilen, n die Anzahl Spalten).

a_{ij} ist der Eintrag in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte.

Punkte oder Striche werden oft eingesetzt, um zu zeigen, dass es im gleichen Schema weitergeht.

Es gibt spezielle, meist quadratische $(n \times n)$ -Matrizen, die eigene Namen haben (dargestellt für $n = 3$):

Die **Einheitsmatrix** I_n (immer quadratisch):

$$I = I_3 = Id = id = E = E_3 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Die **Nullmatrix** (nicht unbedingt quadratisch):

$$0 = 0_{3 \times 3} = 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren: Je nach Person ist mit Vektor ein Zeilen oder Spalten Vektor gemeint (oder beides).

Ein n -dimensionaler (Spalten-)Vektor v :

$$v = \vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n)^\top = (v_1 \dots v_n)^\top$$

Ein n -dimensionaler (Zeilen-)Vektor v :

$$v = \vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^\top = (v_1, \dots, v_n) = (v_1 \dots v_n)$$

Matrixoperationen:

- Transponieren (Einträge an Hauptdiagonale spiegeln):

$$A^\top = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Multiplizieren (nur kompatible Matrizen): $A \cdot B = AB$
- Potenzieren (nur quadratische Matrizen): $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n\text{-mal}}$
- Invertieren: A^{-1}
- Determinante: $\det(A) = \det A = |A|$
- Spur: $\text{spur}(A) = \text{Sp}(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
- Rang: $\text{rang}(A) = \text{rank}(A) = \text{rg}(A)$
- Komplex konjugieren: $\bar{A}$
- Adjungieren (komplex konjugieren und transponieren): $\overline{A^\top} = (\bar{A})^\top = A^H = A^*$