TA-Zusammenfassung zur Hausaufgabenserie 6

Lineare Algebra II, gruppenweite Auswertung auf Basis der vorliegenden KI-Feedbacks

Kurzüberblick über die Gruppe

- Analysiert wurden **7 KI-Feedbacks**. Die Datenlage ist nicht vollständig homogen: Nicht jede Abgabe enthält alle Aufgaben sichtbar, daher werden Häufigkeiten nur dort exakt angegeben, wo sie aus den Feedbacks belegbar sind.
- **Stabile Bereiche** sind die frühen Strukturaufgaben: Dimensionsformel, Determinante unter Basiswechsel, Bildbestimmung über Pivotspalten und der Aufbau der Übergangsmatrix in 6a.
- **Die grösste Lücke** liegt bei Aufgabe 8: In fast allen relevanten Feedbacks fehlt eine sichtbare Bearbeitung; in der einzigen klar dokumentierten Lösung sind 8a und 8b korrekt, 8c aber nicht.
- **Der nächste Schwerpunkt** ist die Übersetzung von Rechenergebnissen in Geometrie: Vor allem bei 6c wird die Matrixform noch nicht zuverlässig als Projektion plus Spiegelung gelesen.
- **Konzeptuell wichtig für die nächste Übungsstunde** sind daher: geometrische Interpretation von Basiswechsel-Ergebnissen, Fredholm-Alternative als Ja/Nein-Test und das saubere Abschliessen von Parametrisierungen oder Matrixprodukten mit einer klaren Schlussaussage.

1. Gruppenstatistik / Dashboard

Anzahl analysierter Feedbacks	7
Beste qualitative Trefferquote	Aufgaben 1 und 2 (je 4 von 5 klar korrekt), Aufgabe 4 (5 von 6 korrekt), Aufgabe 6a (5 von 6 korrekt).
Niedrigste qualitative Trefferquote	Aufgabe 8: keine vollständig korrekte dokumentierte Lösung im Datensatz; Aufgabe 6c: nur 2 von 6 klar korrekt.
Häufig fehlend / nicht sichtbar	Aufgabe 8 ist in 5 von 6 Feedbacks, die sie erwähnen, nicht sichtbar; Aufgabe 7 ist in 2 von 6 Feedbacks nicht sichtbar; Aufgabe 6c ist in 2 von 6 Feedbacks nicht sichtbar.
Häufigste Fehlerthemen	Geometrische Deutung nach Basiswechsel; letzte Schlussfolgerung bei Fredholm-Tests; Parametervariablen nicht konsequent in eine Kernbasis übersetzt; spätere Aufgaben 7/8 teils gar nicht bearbeitet oder nicht dokumentiert.
Besonders gelungene Konzepte	Dimensionsformel bei trivialem Kern, Ähnlichkeit von Darstellungsmatrizen, Bildbestimmung über Gauss/Pivotspalten, Aufstellen von Übergangsmatrizen.

2. Wichtigste Gruppenbeobachtungen

Beobachtung 1: Aufgabe 8 bleibt gruppenweit die grösste Lücke KRITISCH

Fehlermuster: Projektionen, zusammengesetzte Abbildungen und das geometrische Bild eines höherdimensionalen Objekts werden entweder gar nicht sichtbar bearbeitet oder im letzten Schritt falsch gezeichnet.
Häufigkeit: In **5 von 6** Feedbacks, die Aufgabe 8 überhaupt thematisieren, ist keine Lösung sichtbar. Im einzigen klar dokumentierten Bearbeitungsfall sind 8a und 8b korrekt, aber 8c ist nicht korrekt.
Vermutetes Missverständnis: Das Rechnen mit Projektionsmatrizen wird teilweise noch von der geometrischen Wirkung entkoppelt; insbesondere geht beim Übergang von der berechneten Abbildung zur Skizze verloren, dass auch “versteckte” Koordinaten das Bild im Zielraum verändern können.

Warum wichtig: Aufgabe 8 bündelt mehrere Kernideen der Serie zugleich: Matrixdarstellung von Projektionen, Komposition linearer Abbildungen und Interpretation eines Bildes. Wer diese Kette nicht sicher beherrscht, hat später auch bei Modellierungs- und Prüfungsaufgaben mit mehreren linearen Schritten Mühe.
Empfehlung für die Übungsstunde: Nicht direkt mit dem vollen 4D-Beispiel starten, sondern zuerst eine kleinere 3D-zu-2D-Projektion gemeinsam zerlegen: Bilder der Standardbasis bestimmen, Matrix aufbauen, Bilder weniger Ecken berechnen, dann erst skizzieren.
Mini-Board-Beispiel: Für $\varphi(x, y, z) = (x + z, y + z)$ gilt $\varphi(0, 0, 1) = (1, 1)$; die dritte Koordinate kann also das 2D-Bild sehr wohl verschieben.

Beobachtung 2: Von der Diagonalmatrix zur Geometrie fehlt oft der letzte Schritt HOCH

Fehlermuster: Bei Aufgabe 6c wird die Matrix in der neuen Basis zwar teils korrekt oder fast korrekt bestimmt, die zugehörige geometrische Interpretation bleibt aber unvollständig oder unsichtbar.
Häufigkeit: In **4 von 6** Feedbacks zu 6c ist die geometrische Deutung nicht voll gelungen (2 teilweise korrekt, 2 nicht sichtbar). Nur **2 von 6** Feedbacks enthalten eine klar korrekte Interpretation.
Vermutetes Missverständnis: Die Studierenden lesen aus $\mathrm{diag}(-1, -1, 0)$ zwar Eigenwert-artige Informationen ab, übersetzen diese aber nicht konsequent in die Aussage "Projektion auf eine Ebene entlang der dritten Basisrichtung, danach Punktspiegelung in dieser Ebene".
Warum wichtig: Gerade diese Übersetzung verbindet Rechenroutine mit konzeptuellem Verständnis. Sie ist zentral für spätere Diagonalisierungs-, Basiswechsel- und Geometriefragen.
Empfehlung für die Übungsstunde: Die neue Basis explizit als "Koordinatensprache" thematisieren und jedes Diagonal- oder Blockergebnis sofort in den Satz "Was passiert mit b'_1, b'_2, b'_3?" übersetzen lassen.
Mini-Board-Beispiel: In B'-Koordinaten bedeutet $(a, b, c) \mapsto (-a, -b, 0)$: Ebene $\mathrm{span}(b'_1, b'_2)$ bleibt erhalten, dritte Richtung verschwindet.

Beobachtung 3: Fredholm-Alternative und Schlusssätze sind noch nicht robust automatisiert HOCH

Fehlermuster: Selbst wenn $\ker(A^\top)$ passend bestimmt wird, wird die Orthogonalitätsprüfung nicht immer mit einem expliziten Lösbarkeitsurteil abgeschlossen; zusätzlich sind einzelne Lösungen zu Aufgabe 7 gar nicht sichtbar.
Häufigkeit: Zu Aufgabe 7 sind nur **2 von 6** Feedbacks klar korrekt, **1 von 6** weitgehend korrekt, **1 von 6** nur teilweise korrekt und **2 von 6** nicht sichtbar.
Vermutetes Missverständnis: Die Idee "nicht orthogonal $\Rightarrow$ nicht lösbar" ist begrifflich vorhanden, wird aber unter Zeitdruck nicht konsequent bis zum Endsatz ausgesprochen oder aus einem berechneten Skalarprodukt sauber abgeleitet.
Warum wichtig: Die Fredholm-Alternative ist ein klassisches Bindeglied zwischen Theorie und Rechenpraxis. Wer hier die Schlusslogik verpasst, verliert Punkte trotz richtiger Vorarbeit.
Empfehlung für die Übungsstunde: Einen festen Dreischritt einüben: Basis von $\ker(A^\top)$ bestimmen, alle relevanten Skalarprodukte ausrechnen, jeden rechten Vektor mit genau einem Ja/Nein-Satz klassifizieren.
Mini-Board-Beispiel: Gilt $\ker(A^\top) = \mathrm{span}(c)$ und $\langle b, c\rangle = 2 \neq 0$, dann hat $Ax = b$ **keine** Lösung.

3. Priorisierter Plan für die Übungsstunde

1. **Einstieg: 5–8 Minuten**
   Ziel: Rechenweg und Endaussage sauber koppeln.
   Inhalt: Sehr kurzes Warm-up: "Aus einer Parameterdarstellung eine Kernbasis lesen."

TA-Aktion: Zwei freie Parameter an die Tafel schreiben und gemeinsam daraus zwei Basisvektoren erzeugen; dabei explizit markieren, wo viele Lösungen sonst "stehenbleiben".

2. **Hauptproblem 1: 12–15 Minuten**
   Ziel: Diagonalform in neuer Basis geometrisch lesen.
   Inhalt: Beispiel mit $\mathrm{diag}(-1,-1,0)$ beziehungsweise derselben Struktur: Welche Basisrichtungen bleiben, welche verschwinden, wo steckt die Projektion, wo die Spiegelung?
   TA-Aktion: Erst Koordinatenwirkung $(a,b,c) \mapsto (-a,-b,0)$ formulieren lassen, dann gemeinsam in einen vollständigen geometrischen Satz überführen.

3. **Hauptproblem 2: 12–15 Minuten**
   Ziel: Projektionen und Kompositionen als konkrete Bilder im Zielraum verstehen.
   Inhalt: Kleineres 3D-zu-2D-Beispiel anstelle des vollen 4D-Würfels; Bilder der Standardbasis und weniger markanter Eckpunkte berechnen, danach Skizze.
   TA-Aktion: Nicht sofort die ganze Figur zeichnen lassen, sondern systematisch mit Matrixspalten und drei bis vier Bildpunkten arbeiten.

4. **Gemeinsames Beispiel: 10–12 Minuten**
   Ziel: Fredholm-Alternative als Entscheidungsroutine festigen.
   Inhalt: Basis von $\ker(A^\top)$, Orthogonalität mit zwei rechten Seiten, klares Lösbarkeitsurteil.
   TA-Aktion: Für jeden rechten Vektor einen Satz in der Form "lösbar, weil ..." oder "nicht lösbar, weil ..." einfordern.

5. **Abschluss / Checkfrage: 5 Minuten**
   Ziel: Übertrag sichern.
   Inhalt: Drei Kurzfragen: "Was bedeutet die Null auf der Diagonale?", "Woran erkennt man Nicht-Lösbarkeit bei Fredholm?", "Warum reicht bei einer Projektion eine Skizze ohne Bildpunkte meist nicht?"
   TA-Aktion: Antworten laut sammeln und in zwei Merksätze bündeln.

4. Neue Aufgaben und Musterlösungen

Aufgabenblatt 1 – Kernbasis aus einer Parameterdarstellung

Schwierigkeitsgrad: leichter
Lernziel: Eine Lösungsmenge mit freien Parametern sicher in eine Basis des Kerns übersetzen.

Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(C)$.

Aufgabenblatt 2 – Basiswechsel bis zur geometrischen Aussage

Schwierigkeitsgrad: analog zur Serie
Lernziel: Einen Basiswechsel vollständig bis zur neuen Darstellungsmatrix und deren geometrischer Interpretation durchführen.

Auf $\mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung mit Standardmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von der Standardbasis nach B'.
2. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[A]_{B'}$ der Abbildung bezüglich der Basis B'.
3. Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

Aufgabenblatt 3 – Fredholm als Klassifikationstest

Schwierigkeitsgrad: analog zur Serie
Lernziel: Die Fredholm-Alternative als klares Lösbarkeitskriterium für rechte Seiten verwenden.

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A^\top)$.
2. Charakterisieren Sie alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $Ax = b$ lösbar ist.
3. Entscheiden Sie für

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   ob $Ax = b^{(i)}$ lösbar ist.

Aufgabenblatt 4 – Projektion und Bild eines Tetraeders

Schwierigkeitsgrad: Transferaufgabe
Lernziel: Eine Projektion entlang einer Richtung in eine Matrix übersetzen und das Bild eines räumlichen Objekts im Zielraum bestimmen.

Sei $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Projektion entlang des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf die Ebene $z = 0$, und sei

$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad E(x, y, z) = (x, y).$$

Weiter sei $\varphi = E \circ P$.

1. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von P und φ bezüglich der Standardbasen.
2. Berechnen Sie die Bilder der vier Ecken des Tetraeders

$$T = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Beschreiben oder skizzieren Sie das Bild der Kanten von T unter φ.

5. Musterlösungen

Musterlösung 1 – Kernbasis aus einer Parameterdarstellung

Wir lösen $Cx = 0$ mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$. Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wählen $x_3 = s$ und $x_4 = t$ als freie Parameter. Dann folgt aus der zweiten Gleichung

$$x_2 = -s - t$$

und aus der ersten Gleichung

$$x_1 = -x_2 + t = s + 2t.$$

Damit hat jeder Kernvektor die Form

$$x = \begin{pmatrix} s+2t \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\ker(C)$.

> **Didaktischer Hinweis für den TA:** Typische Stolperstelle ist hier der falsche Schluss "die Spalten der Matrix sind schon eine Kernbasis". Lassen Sie die freien Parameter immer explizit mit 1 und 0 einsetzen. Gute Tafelreihenfolge: Gleichungen, freie Parameter, Parametervektor, Basisvektoren. Zeitbedarf: ca. 6–8 Minuten.

Musterlösung 2 – Basiswechsel bis zur geometrischen Aussage

1. Übergangsmatrix. Die Basisvektoren von B' als Spalten liefern die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix bildet B'-Koordinaten in Standardkoordinaten ab. Gesucht ist die umgekehrte Richtung, also

$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Neue Darstellungsmatrix. Es gilt

$$[A]_{B'} = TAS.$$

Noch schneller liest man die Wirkung auf die neuen Basisvektoren direkt ab:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -b'_1,$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -\,b_2',$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Also sind die Spalten von $[A]_{B'}$ gerade die B'-Koordinaten dieser Bildvektoren:

$$[A]_{B'} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Geometrische Interpretation. In B'-Koordinaten gilt

$$(a, b, c) \longmapsto (-a, -b, 0).$$

Das bedeutet:

- Die Ebene $\operatorname{span}(b_1', b_2')$ bleibt erhalten.
- Innerhalb dieser Ebene erfolgt eine Punktspiegelung am Ursprung.
- Die Richtung $b_3' = (1, 1, 1)^\top$ wird auf 0 abgebildet.

In Standardkoordinaten ist die Abbildung also die Projektion entlang $(1, 1, 1)^\top$ auf die Ebene $z = 0$, gefolgt von einer Punktspiegelung in dieser Ebene.

> **Didaktischer Hinweis für den TA:** Zentral ist der Satz "Was passiert mit den neuen Basisvektoren?" Erst daraus wird die Diagonalmatrix geometrisch lesbar. Gute Tafelreihenfolge: S, T, Bilder von b_1', b_2', b_3', erst dann die Verbalisierung der Geometrie. Zeitbedarf: ca. 10–12 Minuten.

Musterlösung 3 – Fredholm als Klassifikationstest

1. Basis von $\ker(A^\top)$**.** Da

$$A^\top = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

suchen wir alle $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$ mit $A^\top y = 0$. Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 0,\\ y_2 + y_3 &= 0,\\ y_1 + y_2 + 2y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist die Summe der ersten beiden. Mit $y_3 = t$ folgt

$$y_1 = -t, \qquad y_2 = -t.$$

Also gilt

$$y = t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

und damit ist

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis von $\ker(A^\top)$.

2. Charakterisierung aller lösbaren rechten Seiten. Nach der Fredholm-Alternative ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn b orthogonal zu allen Vektoren aus $\ker(A^\top)$ ist. Hier genügt also die Bedingung

$$\left\langle b, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Für $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ergibt das

$$-b_1 - b_2 + b_3 = 0,$$

also genau

$$b_3 = b_1 + b_2.$$

3. Klassifikation der drei rechten Seiten.

$$\left\langle b^{(1)}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 1 + 0 = 0,$$

also ist $Ax = b^{(1)}$ lösbar.

$$\left\langle b^{(2)}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 - 1 + 0 = -2 \neq 0,$$

also ist $Ax = b^{(2)}$ **nicht** lösbar.

$$\left\langle b^{(3)}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 + 0 + 2 = 0,$$

also ist $Ax = b^{(3)}$ lösbar.

> **Didaktischer Hinweis für den TA:** Viele Studierende hören nach dem Finden von $\ker(A^\top)$ zu früh auf. Erzwingen Sie den Dreischritt "Kernbasis – Skalarprodukt – Endsatz". Gute Tafelreihenfolge: Kernbasis, allgemeine Bedingung an b, dann erst Einsetzen der Beispiele. Zeitbedarf: ca. 10 Minuten.

Musterlösung 4 – Projektion und Bild eines Tetraeders

1. Matrix von P und φ. Für die Standardbasisvektoren gilt:

$$P(e_1) = e_1, \qquad P(e_2) = e_2.$$

Für $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ suchen wir einen Parameter λ mit

$$e_3 + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in der Ebene $z = 0$. Die dritte Komponente ist $1 - \lambda$, also $\lambda = 1$. Damit

$$P(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für

$$E(x, y, z) = (x, y)$$

ist die Matrix

$$[E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit

$$[\varphi] = [E][P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bilder der Ecken.

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bild der Kanten. Die Kanten des Tetraeders werden auf die Verbindungsstrecken zwischen diesen vier Bildpunkten abgebildet. Das Bild der Ecken ist also genau die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

also die vier Ecken des Einheitsquadrats. Die Kantenbilder ergeben die vier Randstrecken des Quadrats sowie beide Diagonalen. Das Bild ist daher **kein** Tetraeder mehr, sondern ein Quadrat mit eingezeichneten Diagonalen.

Didaktischer Hinweis für den TA: Typische Stolperstelle ist die falsche Annahme, dass die dritte Koordinate nach der Projektion "einfach verschwindet", ohne die ersten beiden zu beeinflussen. Gute Tafelreihenfolge: Bilder von e_1, e_2, e_3, dann die Matrix, dann vier Eckbilder, zuletzt die Kanten als Verbindungsstücke. Zeitbedarf: ca. 12–15 Minuten.

Selbstkontrolle: Alle Aufgaben und Musterlösungen wurden rechnerisch und logisch erneut geprüft.