

TA-Zusammenfassung – Hausaufgabenserie 3

Lineare Algebra II · D-MAVT · FS 2026 · Prof. Dr. N. Hungerbühler Nur für TA / Tutor:innen

Kurzüberblick

- 8 Feedbacks analysiert (8 individuelle studentische Einreichungen).
- Kritisches Problem: Aufgabe 8 (Trigonometrische Orthogonalität) in fast allen Feedbacks unvollständig oder fehlend – nur 1 von 8 vollständig korrekt.
- Wiederkehrendes Muster: Unvollständige Skalarproduktbeweise (3 von 8 Feedbacks mit Lücken in der Axiomenverifikation).
- Stärke der Gruppe: Multiple Choice 1–6 und Normberechnungen (Aufg. 7b/c) grösstenteils korrekt.

Teil B – Gruppenstatistik und Dashboard

Kennzahl	Wert	Kommentar
Analysierte Feedbacks	8	Alle 8 Einreichungen ausgewertet
Aufg. 1–6 eingereicht	6 / 8	2 Feedbacks ohne MC-Teil
Aufg. 1–6 vollständig korrekt	5 / 6*	*1 Feedback: Aufg. 6 falsch, Aufg. 4+5 fehlen
Aufg. 7a korrekt	5 / 8	3 Feedbacks: teilweise korrekt (Beweislücken)
Aufg. 7b vollständig korrekt	7 / 8	1 Feedback: Koeffizientenfehler (2/3 statt 1/3)
Aufg. 7c korrekt	8 / 8	Alle Feedbacks mit korrektem Endergebnis
Aufg. 8a vollständig korrekt	1 / 8	3 nur 1 von 3 Paaren; 3 nicht sichtbar; 1 falsche Methode
Aufg. 8b korrekt	2 / 8	6 Feedbacks ohne sichtbares 8b
Aufg. 9a korrekt	4 / 8	4 Feedbacks nicht sichtbar
Aufg. 9b/c korrekt	2 / 8	6 Feedbacks ohne sichtbares 9b/c

KRITISCH

Aufgabe 8a – Trigonometrische Orthogonalität fast vollständig fehlend

Fehlermuster

In 7 von 8 Feedbacks ist Aufgabe 8a nicht vollständig korrekt: 3 Feedbacks fehlen komplett, 3 zeigen nur 1 von 3 geforderten Orthogonalitätspaaren, 1 Feedback zeigt eine fundamental falsche Methode ($\int (f \cdot g) dx = \int f dx + \int g dx$). Nur 1 von 8 Feedbacks enthält alle drei Paare korrekt.

Häufigkeit

7 von 8 Feedbacks betroffen – häufigste Schwachstelle dieser Serie.

Vermutetes Missverständnis

Produktformeln für Sinus/Kosinus sind nicht präsent oder werden nicht mit Integralen verknüpft. In einem Fall: grundlegender Irrtum, Linearität der Integration auf Produkte auszudehnen.

Warum wichtig

Trigonometrische Orthogonalität ist das Fundament von Fourier-Reihen. In späteren Serien und Prüfungen wird diese Technik direkt vorausgesetzt.

Empfehlung

Produktformel an die Tafel schreiben, dann alle drei Paare live durchrechnen. Explizit zeigen, warum $\int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Mini-Board-Beispiel

$$\cos(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} [\sin((a+b)x) - \sin((a-b)x)] \Rightarrow \int_0^{2\pi} \dots dx = 0.$$

HOCH

Aufgabe 7a – Unvollständige Skalarproduktbeweise

Fehlermuster

3 von 8 Feedbacks mit Lücken: (a) Linearität nur als Ergebnis benannt, nicht algebraisch; (b) Positive Definitheit mit «positive Diagonaleinträge» begründet (nicht ausreichend); (c) Symmetriebeweis: $x^\top Dy$ und $y^\top Dx$ hingeschrieben, ohne zu zeigen, dass sie gleich sind.

Häufigkeit

3 von 8 Feedbacks: teilweise korrekt in Aufgabe 7a.

Vermutetes Missverständnis

Unterschied zwischen «Ich weiss, dass es gilt» und «Ich kann es formal zeigen». Der Schritt $x^\top Dy = (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx$ (wegen $D = D^\top$) muss explizit stehen.

Warum wichtig

Präzise Axiomenverifikation ist zentraler Prüfungsinhalt. Gleicher Beweisstil taucht bei Norm-Axiomen und späteren Bilinearformen auf.

Empfehlung

Vorlage-Beweis für alle drei Axiome an die Tafel; zwei typische Fehler zeigen und korrigieren lassen.

Mini-Board-Beispiel

$$\text{Symmetrie: } \langle x, y \rangle = x^\top Dy = (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx = \langle y, x \rangle.$$

HOCH

Aufgaben 8 und 9 – Hohe Auslassrate

Fehlermuster

Aufgabe 8 fehlt in 3 von 8 Feedbacks vollständig (ein Feedback: «bit too complicated»). Aufgabe 9 ist in 4 von 8 Feedbacks nicht sichtbar.

Häufigkeit

Aufg. 8: 3/8 nicht bearbeitet; Aufg. 9: 4/8 nicht bearbeitet.

Vermutetes Missverständnis

Zeitmanagement oder wahrgenommene Schwierigkeitsschwelle.

Warum wichtig

Fourier-Orthogonalität (8) und Parallelogrammregel / Maximumsnorm / Gram-Schmidt (9) sind prüfungsrelevant.

Empfehlung

Aufgaben 8 und 9 in der Übungsstunde priorisiert besprechen. Einstiegshürde zu Aufg. 8 aktiv abbauen – Produktformeln als Schlüsselwerkzeug vorstellen.

Mini-Board-Beispiel

$$\text{Gram-Schmidt: } P_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x.$$

MITTEL Notation $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht verstanden

Fehlermuster	In 2 von 8 Feedbacks explizite Fragen zur Platzhalternotation: «Was ist $ \cdot $?», «Was bedeutet der Punkt?»
Häufigkeit	2 von 8 Feedbacks mit expliziter Frage; weitere latente Unsicherheiten möglich.
Vermutetes Missverständnis	Studierende verstehen nicht, dass $\ \cdot\ $, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ etc. Abbildungen mit Platzhalter sind – analog zu $f(\cdot)$.
Warum wichtig	Diese Notation taucht in allen weiteren Serien, Vorlesungsfolien und Prüfungen auf.
Empfehlung	5 Minuten zu Beginn der Übungsstunde: Notation erklären, Analogie zu $f(\cdot)$ zeigen.
Mini-Board-Beispiel	$\ \cdot\ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: der Punkt steht für das Argument. $\ x\ $ ist der Wert bei x .

Positive Befunde der Gruppe

- **Multiple Choice 1–6:** Von den 6 Feedbacks mit MC-Teil wurden 5 vollständig korrekt beantwortet (83 %). Konzeptverständnis für L^1/L^∞ -Konvergenz gut.
- **Aufgabe 7c:** 8 von 8 Feedbacks mit korrektem Endergebnis. Rechnerische Umsetzung des Skalarprodukts gelingt gut.
- **Aufgabe 9 (wo bearbeitet):** Alle 4 Feedbacks mit sichtbarem 9a sind korrekt; beide Feedbacks mit 9b und 9c sind vollständig korrekt.
- **Vollständige 8a:** 1 Feedback zeigt alle drei Orthogonalitätspaare systematisch und korrekt – kann als Vorlage in der Übungsstunde dienen.

Teil C – Priorisierter Plan für die Übungsstunde (50 Min.)

Block	Zeit	Ziel und TA-Aktion
1 – Einstieg & Notation	5 Min.	Ziel: Notation klären. Inhalt: $ \cdot $, $\ \cdot\ $, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Abbildungen mit Platzhalter erklären. Frage: «Was sind die drei Axiome eines Skalarprodukts?» TA-Aktion: Tafel, Studierende antworten lassen.
2 – Skalarproduktbe- weise (Aufg. 7a)	12 Min.	Ziel: Formale Beweistechnik für alle drei Axiome. Inhalt: Symmetriebeweis vollständig: $x^\top Dy = (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx$. Positive Definitheit: algebraisch, nicht «positive Einträge». TA-Aktion: Mit Studierenden erarbeiten, dann korrigieren.
3 – Trigonometrie. Orthog- onalität (Aufg. 8a)	18 Min.	Ziel: Alle drei Paare verstehen und ausrechnen. Inhalt: Produktformel herleiten, dann alle drei Paare. TA-Aktion: Produktformel an Tafel, ca. 5 Min. Einzelarbeit, dann gemeinsam besprechen.
4 – Gemeinsames Beispiel	10 Min.	Ziel: Transfer und Selbstkontrolle. Inhalt: Übungsaufgabe ÜA1 oder ÜA3 aus Teil D. TA-Aktion: 3 Min. selbst versuchen, dann live lösen.
5 – Abschluss / Check- frage	5 Min.	Checkfrage: «Welche ist richtig? (a) $\int_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = 0$, (b) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = 0$, (c) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0$.» Antwort: (a) und (c) richtig, (b) falsch ($= \pi$).

Teil D – Neues TA-Material mit Musterlösungen

Ziel dieser Aufgaben: Vertiefung der schwächsten Konzepte: (1) Produkt-Integrale in L^2 -Skalarprodukten, (2) Skalarprodukt mit allgemeiner symmetrischer Matrix, (3) Normaxiome und Verbindung zur Parallelogrammregel. Anti-Duplikat-Regel eingehalten: andere Matrizen, andere Funktionen als in Serie 3.

Aufgabenblatt (ohne Lösungen)

Übungsaufgabe ÜA1 – Produktintegral berechnen

Leichter

Lernziel: Produkt-zu-Summen-Formel anwenden und trigonometrische Integrale über $[0, 2\pi]$ auswerten. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x) \cdot \sin(4x) dx$$

mithilfe der Produktformel $\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$. Welchen Wert ergibt das Integral?

Übungsaufgabe ÜA2 – Skalarprodukt mit symmetrischer 2×2 -Matrix

Analog zur Serie

Lernziel: Alle drei Skalarprodukt-Axiome formal (algebraisch) nachweisen und die induzierte Norm anwenden.

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definieren Sie $\langle x, y \rangle := x^\top B y$ für $x, y \in V$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V definiert.
- (b) Bestimmen Sie die induzierte Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
- (c) Berechnen Sie $\|(1, -2)^\top\|$.

Übungsaufgabe ÜA3 – Orthogonalität in $C^0([0, 1])$

Analog zur Serie

Lernziel: Orthogonalität und Norm in einem Funktionen-Skalarprodukt explizit berechnen.

Seien $f(x) = x - \frac{1}{2}$ und $g(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ auf $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

- (a) Zeigen Sie, dass f und g orthogonal sind, d. h. $\langle f, g \rangle = 0$.
- (b) Berechnen Sie $\|f\|$.

Übungsaufgabe ÜA4 – Normaxiome und Parallelogrammregel

Transferaufgabe

Lernziel: Normeigenschaften formal nachweisen und mit der Parallelogrammregel verknüpfen.

Sei $\|(x_1, x_2)^\top\| := |x_1| + 2|x_2|$ für $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
- (b) Kann diese Norm von einem Skalarprodukt induziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort mit der Parallelogrammregel.

Musterlösungen (nur für TA)

Musterlösung ÜA1 – Produktintegral

Produktformel: $\cos(A) \sin(B) = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$.

Mit $A = 2x$, $B = 4x$:

$$\cos(2x) \cdot \sin(4x) = \frac{1}{2} [\sin(6x) - \sin(-2x)] = \frac{1}{2} [\sin(6x) + \sin(2x)].$$

Daher:

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x) \sin(4x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(6x) + \sin(2x)] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(6x)}{6} - \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{2\pi} = \mathbf{0}.$$

Begründung: $\int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

TA-Hinweis: Typische Stolperstelle: falsche Produktformel (Verwechslung $\cos \cdot \cos$ vs. $\cos \cdot \sin$).
Tafelreihenfolge: erst Formel herleiten aus Additionstheoremen, dann einsetzen. Zeitbedarf: 5–7 Min.

Musterlösung ÜA2 – Skalarprodukt mit B

(a) Nachweis Skalarprodukt:

Linearität im ersten Argument:

$$\begin{aligned} \langle x+z, y \rangle &= (x+z)^\top B y = x^\top B y + z^\top B y = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \\ \langle \alpha x, y \rangle &= (\alpha x)^\top B y = \alpha (x^\top B y) = \alpha \langle x, y \rangle. \checkmark \end{aligned}$$

Symmetrie ($B = B^\top$):

$$\langle x, y \rangle = x^\top B y = (x^\top B y)^\top = y^\top B^\top x = y^\top B x = \langle y, x \rangle. \checkmark$$

Positive Definitheit:

$$\langle x, x \rangle = x^\top B x = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \left(2x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{7}{4}x_2^2 \geq 0.$$

Gleichheit genau für $x_2 = 0$ und $2x_1 = 0$, also $x = 0$. $\checkmark$

(b) $\|x\| = \sqrt{4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$.

(c) $\|(1, -2)^\top\|^2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 4 - 4 + 8 = 8 \Rightarrow \|(1, -2)^\top\| = 2\sqrt{2}$.

TA-Hinweis: Stolperstelle: Positive Definitheit nur mit Determinante begründen (nicht als alleinsteher Beweis). Besser: quadratisch ergänzen. Tafelreihenfolge: Symmetrie (kurz) $\rightarrow$ Linearität $\rightarrow$ Positive Definitheit (längster Schritt). Zeitbedarf: 10–12 Min.

Musterlösung ÜA3 – Orthogonalität in $C^0([0, 1])$

(a) Ausmultiplizieren:

$$(x - \frac{1}{2})(x^2 - x + \frac{1}{6}) = x^3 - x^2 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{12} = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}.$$

$$\langle f, g \rangle = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3 - 6 + 4 - 1}{12} = 0. \checkmark$$

(b)

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\|f\| = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Hinweis: $g(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ ist das in Serie 3, Aufg. 9c bestimmte orthogonale Polynom – diese Aufgabe ist direkt anschlussfähig.

TA-Hinweis: Stolperstelle: Ausmultiplizieren fehlerhaft. Tafelreihenfolge: erst Integral aufschreiben, sorgfältig ausmultiplizieren, integrieren, Brüche auf gemeinsamen Nenner. Zeitbedarf: 8–10 Min.

Musterlösung ÜA4 – Normaxiome und Parallelogrammregel

(a) Normaxiome:

Definitheit: $|x_1| + 2|x_2| \geq 0$; $= 0 \iff x_1 = x_2 = 0$. $\checkmark$

Homogenität: $\|\lambda x\| = |\lambda x_1| + 2|\lambda x_2| = |\lambda|(|x_1| + 2|x_2|) = |\lambda| \|x\|$. $\checkmark$

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| = |x_1 + y_1| + 2|x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + 2|x_2| + 2|y_2| = \|x\| + \|y\|$. $\checkmark$

(b) Parallelogrammregel:

Wähle $x = (1, 0)^\top$, $y = (0, 1)^\top$: $\|x\| = 1$, $\|y\| = 2$.

$$\|x + y\| = 1 + 2 = 3, \quad \|x - y\| = 1 + 2 = 3.$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 9 + 9 = 18 \neq 10 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1 + 4).$$

$\Rightarrow$ Die Parallelogrammregel ist verletzt. Diese Norm kann *nicht* von einem Skalarprodukt induziert werden.

TA-Hinweis: Stolperstelle: schlechte Wahl $x = y$ (gibt keine Verletzung). Tipp: x und y so wählen, dass $\|x\| \neq \|y\|$. Tafelreihenfolge: erst Axiome (schnell), dann Gegenbeispiel. Zeitbedarf: 10 Min.

Selbstkontrolle: Alle Aufgaben und Musterlösungen wurden rechnerisch und logisch erneut geprüft.